



Aalborg Universitet

AALBORG UNIVERSITY  
DENMARK

## Beregning af en armeret betonbjælkes nedbøjning og vinkeldrejning

*Revideret udgave*

Heshe, Gert

*Publication date:*  
2002

*Document Version*  
Tidlig version også kaldet pre-print

[Link to publication from Aalborg University](#)

*Citation for published version (APA):*

Heshe, G. (2002). *Beregning af en armeret betonbjælkes nedbøjning og vinkeldrejning: Revideret udgave*. Institut for Bygningsteknik, Aalborg Universitet. U/ Bind U0209

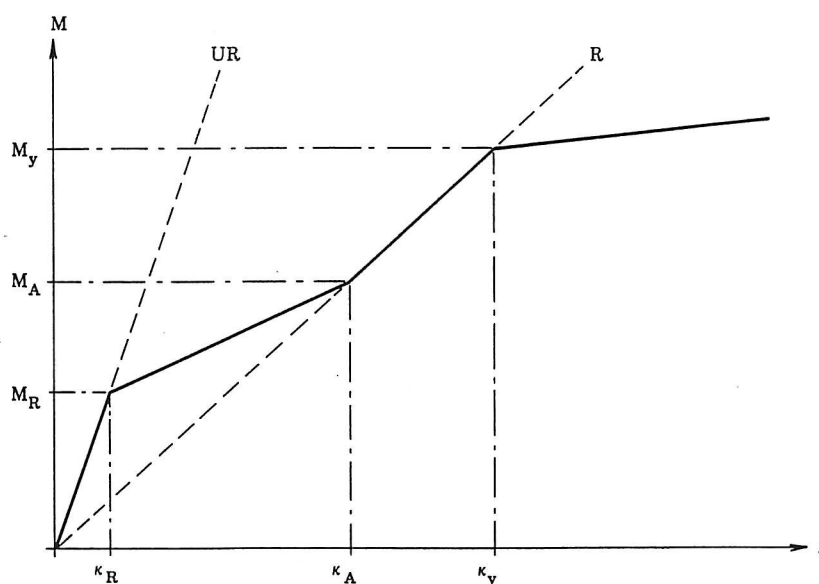
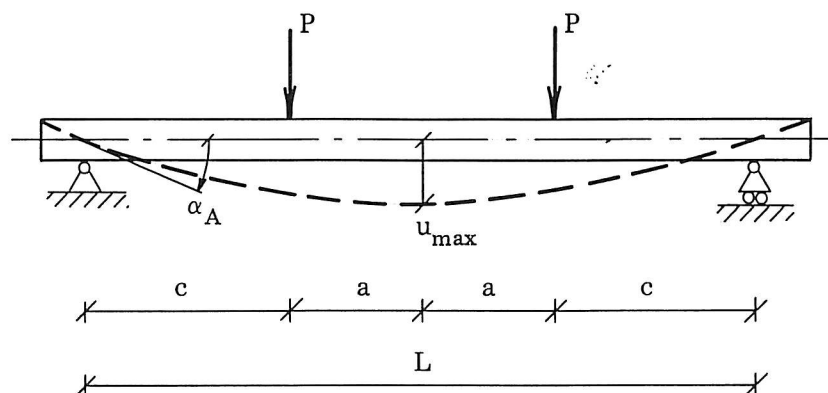
### General rights

Copyright and moral rights for the publications made accessible in the public portal are retained by the authors and/or other copyright owners and it is a condition of accessing publications that users recognise and abide by the legal requirements associated with these rights.

- ? Users may download and print one copy of any publication from the public portal for the purpose of private study or research.
- ? You may not further distribute the material or use it for any profit-making activity or commercial gain
- ? You may freely distribute the URL identifying the publication in the public portal ?

### Take down policy

If you believe that this document breaches copyright please contact us at [vbn@aub.aau.dk](mailto:vbn@aub.aau.dk) providing details, and we will remove access to the work immediately and investigate your claim.



# INDHOLDSFORTEGNELSE

1. INDLEDNING . . . . .	1
2. FORUDSÆTNINGER . . . . .	2
3. BESTEMMELSE AF RELATIONEN MELLEM LASTEN $P$ OG BJÆLKENS MAKSIMALE NEDBØJNING $u_{\max}$ . . . . .	5
4. BESTEMMELSE AF RELATION MELLEM LASTEN $P$ OG BJÆLKENS VINKELDREJNING $\alpha_A$ OVER UNDERSTØTNINGERNE. . . . .	11
SYMBOLLISTE . . . . .	13
LITTERATURLISTE . . . . .	15

# BEREGNING AF EN ARMERET BETONBJÆLKES NEDBØJNING OG VINKELDREJNING

## 1. INDLEDNING

I Dansk Ingeniørforenings Norm for betonkonstruktioner, DS 411, 4. udgave, marts 1999 [1.59] angives, at for en simpelt understøttet bjælke med spændvidden  $L$  kan den maksimale udbøjningstilvækst ved bjælkemidten  $\Delta u_{\max}$  tilnærmet bestemmes af

$$\Delta u_{\max} = K \cdot \Delta\left(\frac{1}{r}\right) \cdot L^2 = K \cdot \Delta\kappa \cdot L^2 \quad (1)$$

hvor  $r$  er systemliniens krumningsradius

$\Delta\kappa = \frac{\Delta\varepsilon}{\Delta h}$  er krumningstilvæksten

$\Delta\varepsilon$  er forskellen mellem tøjningstilvæksterne i to punkter af tværsnittet med indbyrdes afstand  $\Delta h$  målt i udbøjningsretning.

For en simpelt understøttet bjælke med spændvidden  $L$  kan som en tilnærmelse anvendes  $K \sim 0,1$ , når  $\Delta\kappa$  beregnes som krumningstilvæksten ved bjælkemidten.

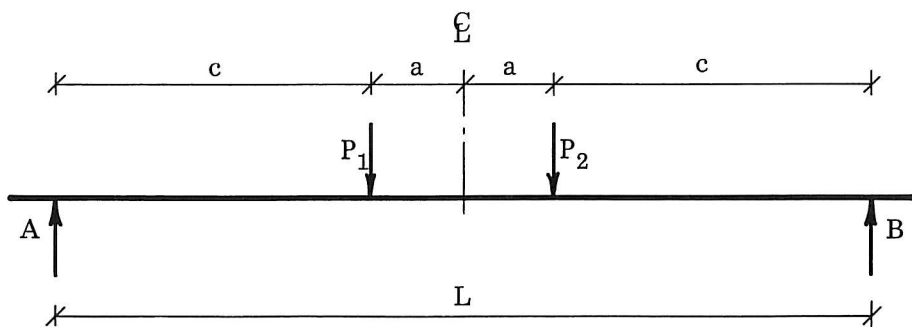
Antages krumningskurven ligedannet med momentkurven og en lastopstilling, fx. som vist i figur 1 med  $a = 0,11 L$  og  $c = 0,39 L$ , kan værdien  $K = 0,0999 \sim 0,1$  anvendes ved en tilnærmet bestemmelse af den maksimale udbøjningstilvækst. Vedr. andre lastopstillinger henvises til kapitel 5.3 i [4].

Denne formel, der kun medtager bøjningsmomentets bidrag, er så simpel, at de fundne resultater kun kan betragtes som givende størrelsesordenen for det ønskede resultat.

I det følgende skal der angives en beregningsmetode, som stadigvæk må betragtes som en tilnærmelse, men som dog må anses for at give resultater, der stemmer bedre overens med virkeligheden end (1).

Beregningsmetoden bygger på lastopstillingen vist i figur 1, men den kan modificeres til anvendelse ved andre lasttilfælde, idet krumningsvariationerne, der i afsnit 3 benyttes til beregning af  $u_{\max}$ , findes ved hjælp af tværsnittes bøjningsarbejdslinie, se figur 4, og den aktuelle momentvariation langs bjælkeaksen.

De viste beregninger i afsnittene 2-4 medtager kun bøjningsmomentets bidrag.



Figur 1. Opstalt af bjælke med lastangivelse.

Da det følgende er tænkt anvendt ved vurdering af resultater fra forsøg med simpelt understøttede armerede betonbjælker, regnes værdierne for de materialekonstanter, der indgår, lig med de ved forsøg fundne middelværdier.

## 2. FORUDSÆTNINGER

- $P_1 = P_2$
- Plan tøjningsfordeling.
- Arbejdslinierne for beton og armering regnes lineærelastisk-idealplastiske, som vist i figur 2 og 3. Middelværdierne af betonens trykstyrke  $f_{cm}$ , armeringens flyde- og brudspænding  $f_{ym}$  og  $f_{um}$  samt betonens og armeringens begyndelseselasticitetskoefficienter  $E_{0cm}$  og  $E_{0sm}$  angiver i det følgende de ved forsøg fundne middelværdier for de pågældende størrelser. For armeringer uden udpræget flydegrænse benyttes middelværdien af 0,2%-spændingen i stedet for flydespændingen.

Hvis middelværdien for betonens begyndelseselasticitetskoefficient  $E_{0cm}$  ikke er bestemt ved forsøg, kan værdien tilnærmet bestemmes af

$$E_{0cm} = 51.000 \frac{f_{cm}}{f_{cm} + 13} \quad (2)$$

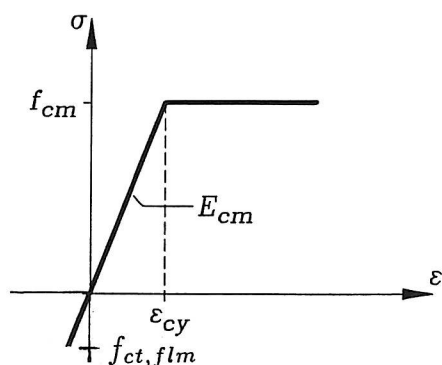
Middelværdien af betonens bøjningstrækstyrke  $f_{ct, flm}$  kan bestemmes af

$$f_{ct, flm} = 1,6 \sqrt{0,1 f_{cm}} \quad (3)$$

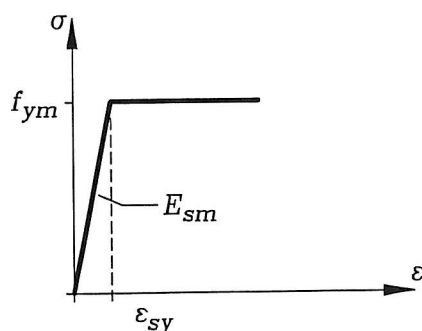
Ovenstående værdier gælder ved korttidspåvirkning.

Ved beregning af størrelsen af nedbøjningen ved revnelasten anvendes elasticitetskoefficienten  $E_{cm} = E_{0cm}$ , fordi spændingerne i betonen ved denne last er små. Ved beregning af nedbøjningen for højere laster og dermed større momenter anvendes en reduceret værdi for betonens elasticitetskoefficient (sekanthældningen), nemlig  $E_{cm} = 0,7 E_{0cm}$ .

Betonens trækstyrke medregnes kun for  $0 \leq \kappa \leq \kappa_R$ , hvor  $\kappa_R$  er krumningen svarende til revnemomentet



Figur 2. Arbejdslinie for beton

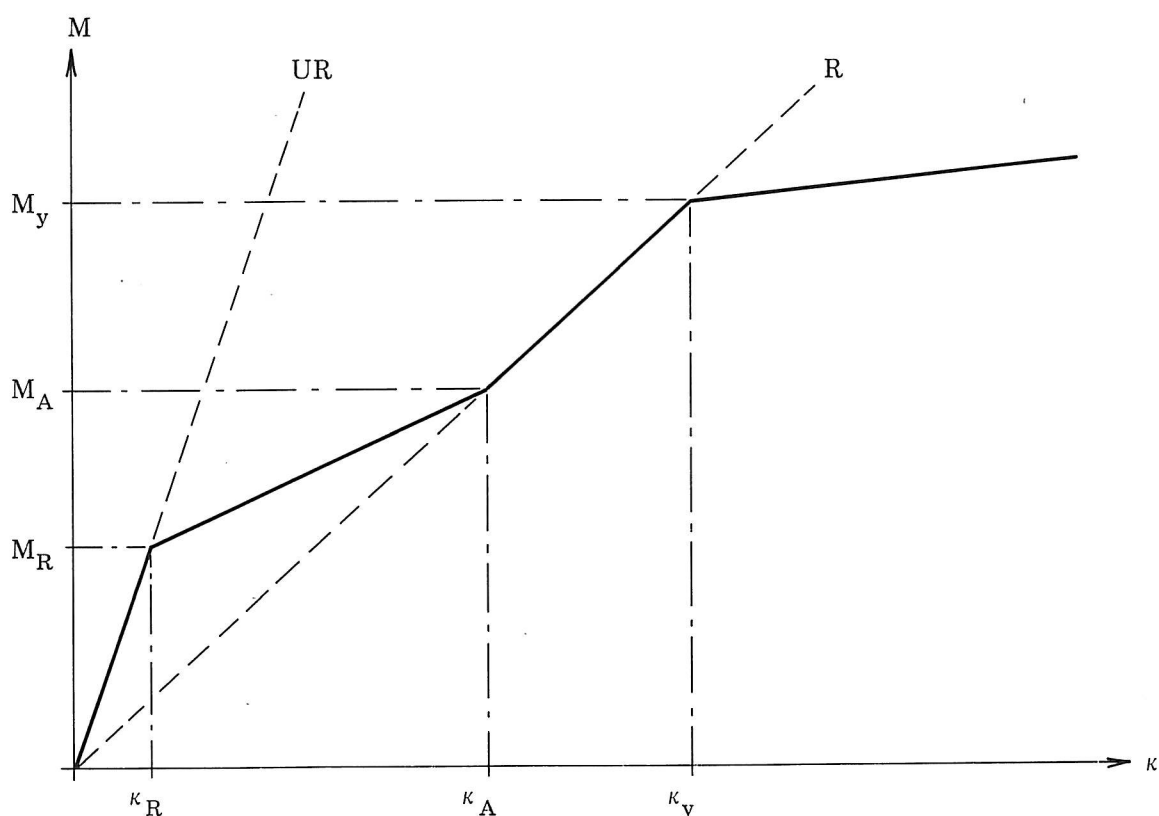


Figur 3. Arbejdslinie for armering

- d. Der tages hensyn til revneforekomsterne i den belastede betonbjælke ud fra følgende betragtninger:

Der er stor forskel på bøjningsstivheden for den urevnede og den revnede bjælke. Overgangen sker dog ikke brat, dels fordi bjælken ikke vil revne i sin fulde længde, når revnemomentet netop nås mellem kræfterne  $P_1$  og  $P_2$ , og dels fordi der stadigvæk vil være en bøjningsstivhed mellem revnerne svarende til bøjningsstivheden for det urevnede tværsnit.

For deformationsberegninger i praksis vil bjælken ofte befinde sig i omtalte overgangsområde. I henhold til CEB (Comité Européen du Béton): Recommendations internationales pour le calcul et l'exécution des ouvrages en béton. 2. udgave 1970 [2] skal der i området  $0 < \kappa < \kappa_y$  benyttes den i figur 4 viste sammenhæng mellem krumningen  $\kappa$  og momentet  $M$ .  $\kappa_y$  er krumningen svarende til netop indtruffet flydning i armeringen, d.v.s.  $\varepsilon_{s1} = \varepsilon_{sy}$



Figur 4. Bøjningsarbejdslinie til anvendelse ved beregning af armerede betonbjælkers nedbøjning.

$M_R$  og  $\kappa_R$  er henholdsvis størrelsen af moment og krumning ved revnelasten

$M_A$  og  $\kappa_A$  er henholdsvis størrelsen af moment og krumning svarende til den last, hvor tværsnittet regnes fuldt revnet

$M_y$  og  $\kappa_y$  er henholdsvis størrelsen af moment og krumning svarende til netop indtruffet flydning i trækarmring, dvs. når der netop er indtruffet flydning i nederste armeringslag.

De rette linier  $UR$  og  $R$  i figur 4 angiver bøjningsarbejdslinierne svarende til henholdsvis urevnet og revnet tværsnit.

Vedr. betydningen af betegnelserne anvendt nedenfor henvises til symbollisten.

Sammenhængen mellem  $\kappa$  og  $M$  i overgangsområdet  $\kappa_R < \kappa < \kappa_A$  bestemmes ved

$$\kappa = \frac{M_R}{E_{cm} \cdot I_{zur,tr}} + \frac{4}{3} \frac{M - M_R}{E_{cm} \cdot I_{zr,tr}} \quad (4)$$

$I_{zur,tr}$  og  $I_{zr,tr}$  er inertiomentet for henholdsvis det urevnede og det revnede transformerede tværsnit omkring det pågældende tværsnits tyngdepunktsakse.

Ligningen for den rette linie  $UR$  er givet ved

$$M = E_{0cm} \cdot I_{zur,tr} \cdot \kappa \quad (4a)$$

Revnemomentet  $M_R$  og den hertil svarende krumning  $\kappa_R$  bestemmes af

$$M_R = f_{ct,flm} \cdot \frac{I_{zur,tr}}{y_u} \quad (5)$$

$$\kappa_R = \frac{M_R}{E_{cm} \cdot I_{zur,tr}} = \frac{f_{ct,flm}}{E_{cm}} \cdot \frac{1}{y_u} = \frac{\sigma_{cc}}{E_{cm}} \cdot \frac{1}{y_0} \quad (6)$$

hvor  $y_u$  og  $y_0$  er afstanden fra det urevnede transformerede tværsnits tyngdepunktsakse til henholdsvis tværsnittets underkant og overkant.

$\sigma_{cc}$  er spændingen i betonens trykzone.

Af (4) fås

$$M = M_R \left( 1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{I_{zr,tr}}{I_{zur,tr}} \right) + \frac{3}{4} \cdot E_{cm} I_{zr,tr} \cdot \kappa \quad (7)$$

Ligningen for den rette linie  $R$  er givet ved

$$M = E_{cm} \cdot I_{zr,tr} \cdot \kappa \quad (8)$$

$\kappa_A$  findes ved at indsætte (8) i (7)

$$\kappa_A = \frac{4 \cdot M_R}{E_{cm} \cdot I_{zur,tr}} \left( 1 - \frac{3}{4} \frac{I_{zr,tr}}{I_{zur,tr}} \right) \quad (9)$$

$M_A$  findes herefter ved at indsætte (9) i (8)

$$M_A = E_{cm} \cdot I_{zr,tr} \cdot \kappa_A = 4M_R \left( 1 - \frac{3}{4} \frac{I_{zr,tr}}{I_{zur,tr}} \right) \quad (10)$$

Momentet svarende til netop indtruffet flydning i nederste lag i trækarmeringen ( $\varepsilon_{s1} = \varepsilon_y$ ) bestemmes af

$$M_y = f_{ym} \frac{I_{zr,tr}}{y_{s1}} \cdot \frac{1}{\alpha} \quad (11)$$

hvor  $\alpha = \frac{E_{sm}}{E_{cm}}$  og  $y_{s1}$  er afstanden fra det transformerede revnede tværsnits tyngdepunkt til tyngdepunktet for det nederste armeringslag. Den hertil svarende krumning findes af

$$\kappa_y = \frac{M_y}{E_{cm} \cdot I_{zr,tr}} = \frac{\varepsilon_{sy}}{y_{s1}} \quad (12)$$

Bemærk, at der i det følgende benyttes samme fortegneregning som i [4]. Dvs. trækspændinger og -tøjninger (forlængelser) regnes positive, medens trykspændinger og -tøjninger (forkortelser) regnes negative. Styrker som fx.  $f_{cm}, f_{ym}$  m.fl. regnes altid positive, uanset om det er træk- eller trykstyrker. De til styrkerne hørende tøjninger som fx.  $\varepsilon_{cy}$  og  $\varepsilon_{sy}$  m.fl. regnes ligeledes altid positive.

### 3. BESTEMMELSE AF RELATIONEN MELLEM LASTEN $P$ OG BJÆLKENS MAKSIMALE NEDBØJNING $u_{\max}$

For at vurdere teorien for flytningsbestemmelsen for en armeret betonbjælke belastet, som vist i figur 1, optegnes en graf visende den teoretiske relation mellem bjælkens maksimale nedbøjning og  $M_{\max}$  eller middelværdien  $P$  af  $P_1$  og  $P_2$ .

Plottes de ved forsøg fundne resultater i samme koordinatsystem, vil det af grafen fremgå, hvor godt teorien stemmer overens med forsøgsresultaterne.

Til optegning af den teoretiske  $P, u_{\max}$ -relation kan der f.eks. bestemmes 4 punkter ( $u_{\max}, P$ ) svarende til  $\kappa = \kappa_R$ ,  $\kappa = \kappa_A$ ,  $\kappa = \kappa_y$  og  $\kappa = \kappa_{2y}$ .

$\kappa_y$  er krumningen ved bjælkemidten for  $M = M_y$ , dvs.  $\varepsilon_{s1} = \varepsilon_y$

$\kappa_{2y}$  er krumningen ved bjælkemidten for  $M = M_{2y}$ , dvs.  $\varepsilon_{s1} = 2\varepsilon_y$

#### 3.1 Bestemmelse af $P$ svarende til krumningsværdierne $\kappa_{\max} = (\kappa_R, \kappa_A, \kappa_y \text{ og } \kappa_{2y})$

For  $\kappa_{\max}$  lig  $\kappa_R, \kappa_A$  og  $\kappa_y$  bestemmes de tilsvarende momentværdier  $M_R, M_A$  og  $M_y$  af henholdsvis (5), (10) og (11), hvorefter de tilhørende værdier af  $P$  bestemmes af

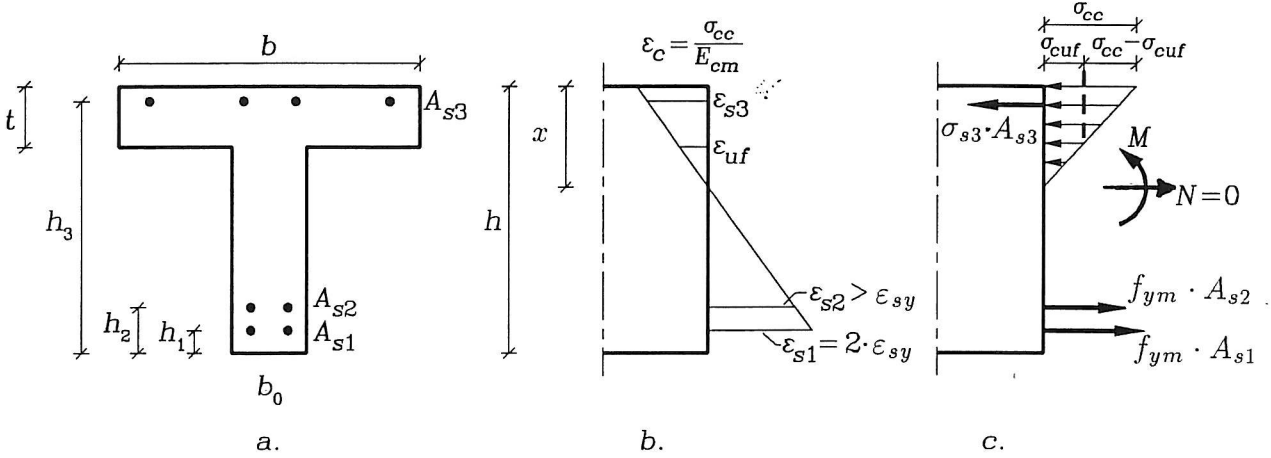
$$P = \frac{M}{c}$$



hvor  $c$  er afstanden fra understøtningen til kraftangrebepunktet, se figur 1.

For at få et punkt på bøjningsarbejdslinien for  $\kappa > \kappa_y$  beregnes f.eks.  $\kappa_{2y}$  og  $M$  svarende til  $\varepsilon_{s1} = 2 \cdot \varepsilon_{sy}$ .

De i det følgende viste regninger gælder for normalt armeret tværsnit,  $h_c > t$  og  $\varepsilon_{s3} < \varepsilon_{sy}$ .



Figur 5. Tværsnit med tilhørende tøjnings- og spændingsfordeling.

Af figur 5b findes

$$\varepsilon_c = -\frac{x}{h - (x + h_1)} \cdot 2\varepsilon_{sy} \rightarrow \sigma_{cc} = E_{cm} \cdot \varepsilon_c = -E_{cm} \cdot 2\varepsilon_{sy} \frac{x}{h - (x + h_1)} \quad (13)$$

$$\varepsilon_{s3} = -\frac{x - (h - h_3)}{h - (x + h_1)} \cdot 2\varepsilon_{sy} \rightarrow \sigma_{s3} = E_s \cdot \varepsilon_{s3} = -E_s \cdot 2\varepsilon_{sy} \frac{x - (h - h_3)}{h - (x + h_1)} \quad (14)$$

$$\varepsilon_{uf} = -\frac{x - t}{h - (x + h_1)} \cdot 2\varepsilon_{sy} \rightarrow \sigma_{cuf} = E_{cm} \cdot \varepsilon_{uf} = -E_{cm} \cdot 2\varepsilon_{sy} \frac{x - t}{h - (x + h_1)} \quad (15)$$

hvor  $\varepsilon_{s3}$  og  $\sigma_{s3}$  er henholdsvis tøjning og spænding i tyngdepunktet for armeringslaget  $A_{s3}$

$\varepsilon_{uf}$  og  $\sigma_{cuf}$  er henholdsvis tøjning og spænding i betonen ved flangens underkant

$x$  er tværsnittets nulliniedybde

Ved projektion på vandret fås

$$N = 0 = -\frac{1}{2}(\sigma_{cc} + \sigma_{cuf}) \cdot b \cdot t - \frac{1}{2} \cdot \sigma_{cuf} \cdot b_0 \cdot (x - t) - \sigma_{s3} \cdot A_{s3} + f_{ym}(A_{s1} + A_{s2}) \quad (16)$$

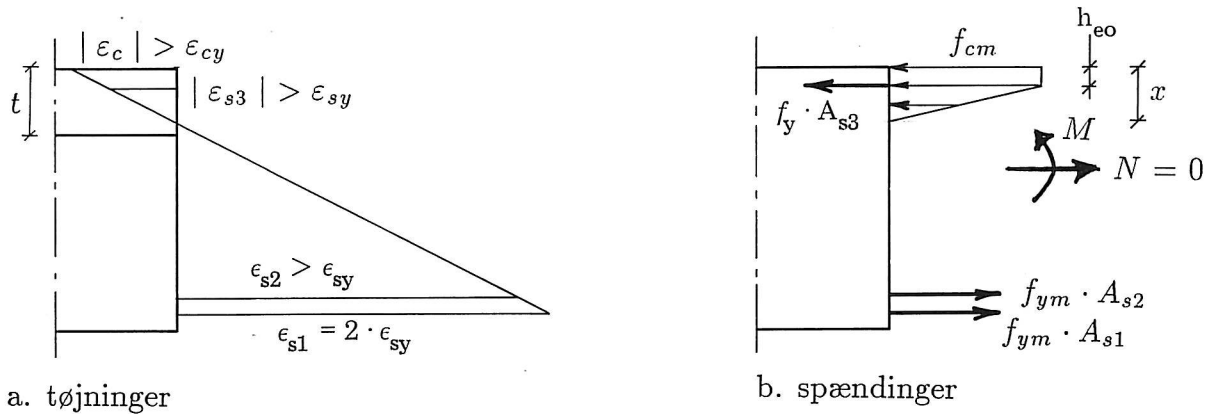
Ved indsættelse af (13) - (15) i (16) fås en ligning til bestemmelse af  $x$ . Med kendt værdi af  $x$  kan det tilhørende moment bestemmes af spændingsfordelingen vist i figur 5c, f.eks. ved moment om en vandret linie gennem nederste armeringslag

$$\begin{aligned} M = & -\frac{1}{2}(\sigma_{cc} - \sigma_{cuf}) \cdot b \cdot t \left( h - h_1 - \frac{1}{3}t \right) - \sigma_{cuf} \cdot b \cdot t \cdot \left( h - h_1 - \frac{1}{2}t \right) \\ & - \frac{1}{2} \cdot \sigma_{cuf} \cdot b_0(x - t) \left( h - h_1 - t - \frac{1}{3}(x - t) \right) \\ & - A_{s3} \cdot \sigma_{s3}(h_3 - h_1) - A_{s2} \cdot f_{ym}(h_2 - h_1) \end{aligned}$$

Den hertil hørende krumning beregnes af

$$\kappa_{2y} = \frac{2\varepsilon_y}{h - h_1 - x}$$

Hvis f.eks.  $|\varepsilon_c| > \varepsilon_{cy}$ ,  $x < t$  og  $|\varepsilon_{s3}| > \varepsilon_{sy}$  bliver fremgangsmåden som vist nedenfor. Spændingsfordelingen i trykzonen angives i overensstemmelse med den i figur 2 viste arbejdslinie for betonen,  $\sigma_{s3}$  sættes lig  $-f_y$ , og der skal kun regnes med trykspændinger i flangen. Den til dette tilfælde hørende tøjnings- og spændingsfordeling kunne være som vist i figur 6a og b.



Figur 6. Tøjnings- og spændingsfordeling ved  $|\varepsilon_c| > \varepsilon_{cy}$ ,  $|\varepsilon_{s3}| > \varepsilon_{sy}$  og  $x < t$ .

$|\varepsilon_c| = \varepsilon_{cy} = \frac{f_{cm}}{E_{cm}}$  optræder i afstanden  $h_{eo}$  fra tværsnittets overkant

$\varepsilon_{s3}$  optræder i afstanden  $h_3$  fra tværsnittets bund

Af ensvinklede trekanter i figur 6a fås

$$\frac{x - h_{eo}}{\varepsilon_{cy}} = \frac{h - x - h_1}{2\varepsilon_{sy}} \rightarrow h_{eo} = x - \frac{\varepsilon_{cy}}{2\varepsilon_{sy}}(h - h_1 - x) \quad (17)$$

Vandret projektion giver

$$N = 0 = -(b \cdot h_{eo} + \frac{1}{2}b(x - h_{eo})) \cdot f_{cm} - A_{s3} \cdot f_{ym} + (A_{s1} + A_{s2}) \cdot f_{ym} \quad (18)$$

Ved at indsætte  $h_{eo}$  fra (17) som funktion af  $x$ , kan  $x$  bestemmes af (18), hvorefter  $h_{eo}$  bestemmes af (17).

Herefter kan  $M_{2y}$  bestemmes af figur 6b, fx. ved moment om nederste armeringslag

$$M = f_{cm} \cdot b \cdot h_{eo}(h - h_1 - 0,5 \cdot h_{eo}) + 0,5 f_{cm} \cdot b(x - h_{eo})(h - h_{eo} - h_1 - \frac{1}{3}(x - h_{eo})) + f_{ym} \cdot A_{s3}(h_3 - h_1) - f_{ym} \cdot A_{s2}(h_2 - h_1) \quad (19)$$

$\kappa_{2y}$  bestemmes af figur 6a som

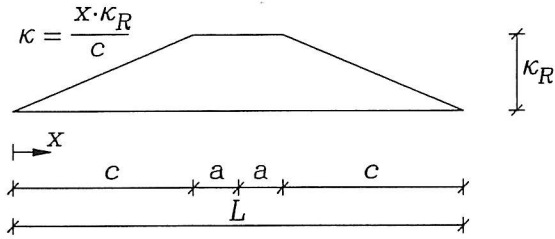
$$\kappa_{2y} = \frac{2\varepsilon_{sy}}{h - x - h_1} \quad (20)$$

### 3.2 Bestemmelse af $u_{\max}$ svarende til krumningsværdierne

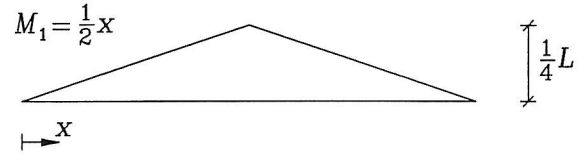
$$\kappa_{\max} = (\kappa_R, \kappa_A, \kappa_y \text{ og } \kappa_{2y})$$

Nedenfor benyttes det virtuelle arbejdes princip til bestemmelse af  $u_{\max}$ .

#### 3.2.1 $M_{\max} = M_R, P = \frac{M_R}{c}, \kappa_{\max} = \kappa_R$



Figur 7. Krumningsvariation for  $P$ -lasten



Figur 8. Moment for kraften 1 på bjælkemidten

Anvendes det virtuelle arbejdes princip fås

$$u_{\max} = 2 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}L} M_1 \cdot \kappa \cdot dx = 2 \cdot \left\{ \frac{1}{3} \cdot c \cdot \frac{1}{2} \cdot c \cdot \kappa_R + \frac{1}{2} a \cdot \kappa_R \left( \frac{1}{2}c + \frac{1}{2}(a + c) \right) \right\}$$

$$u_{\max} = \kappa_R \left( \frac{1}{3}c^2 + \frac{1}{2}a^2 + a \cdot c \right) \quad (21)$$

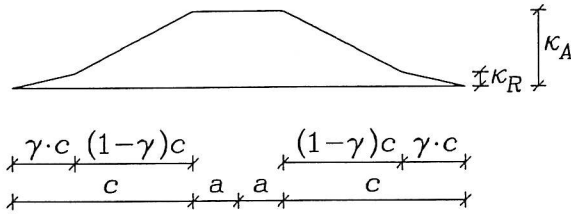
idet integrationsformlerne i f.eks. [3] tabel 9.2–9.6 er benyttet.

Med fx.  $L = 2680 \text{ mm}$ ,  $c = 1040 \text{ mm} = 0,3881L$  og  $a = 300 \text{ mm} = 0,1119L$  fås

$$u_{\max} = 0,0999 \kappa_R \cdot L^2 = \frac{\kappa_R}{10,01} \cdot L^2 \sim 0,1 \kappa_R \cdot L^2$$

Sammenlign med (1).

$$3.2.2 \quad M_{\max} = M_A, \quad P = \frac{M_A}{c}, \quad \kappa_{\max} = \kappa_A$$



$$M_A = P_A \cdot c$$

$$P_A = \frac{M_A}{c}$$

Idet revnemomentet  $M_R$  optræder i afstanden  $\gamma \cdot c$  fra understøtningerne fås

$$M_R = P_A \cdot \gamma \cdot c = M_A \cdot \gamma$$

og dermed

$$\gamma = \frac{M_R}{M_A}$$

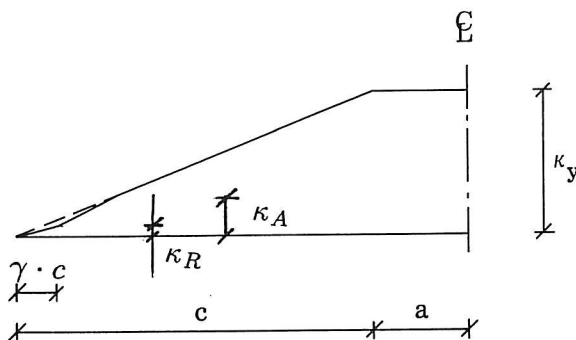
Figur 9. Krumningsvariation for  $\kappa_{\max} = \kappa_A$

Momenterne  $M_R$  og  $M_A$  optræder henholdsvis i afstanden  $\gamma \cdot c$  og  $c$  fra understøtningerne.

Anvendes det virtuelle arbejdes princip, fås

$$\begin{aligned} u_{\max} &= 2 \cdot \int_0^{\frac{1}{2}L} M_1 \cdot \kappa \cdot dx \\ u_{\max} &= 2 \left\{ \frac{1}{3} \cdot \gamma \cdot c \cdot \kappa_R \cdot \frac{1}{2} \cdot \gamma \cdot c + \frac{c}{6} (1 - \gamma) (\kappa_R \cdot \gamma \cdot c + \kappa_A \cdot c \right. \\ &\quad \left. + \kappa_R \cdot \frac{1}{2} c + \kappa_A \cdot \frac{1}{2} c \cdot \gamma) + \frac{a}{2} \cdot \kappa_A \left( \frac{1}{2} c + \frac{1}{2} (a + c) \right) \right\} \\ u_{\max} &= \frac{c^2}{6} (1 + \gamma) \cdot \kappa_R + \left( \frac{c^2}{3} \left( 1 + \frac{1}{2} \cdot \gamma \right) (1 - \gamma) + a \left( c + \frac{1}{2} a \right) \right) \cdot \kappa_A \end{aligned} \quad (22)$$

$$3.2.3 \quad M_{\max} = M_y, \quad P = \frac{M_y}{c}, \quad \kappa_{\max} = \kappa_y, \quad \varepsilon_s = \varepsilon_{sy}$$



I figur 10 er vist fuldt optrukket den krumningskurve, der skulle regnes med, hvis der tages hensyn til urevnet tværsnit for  $\kappa < \kappa_R$  og til overgangszonen for  $\kappa_R < \kappa < \kappa_A$ .

Figur 10. Krumningsvariation for  $\kappa_{\max} = \kappa_y$

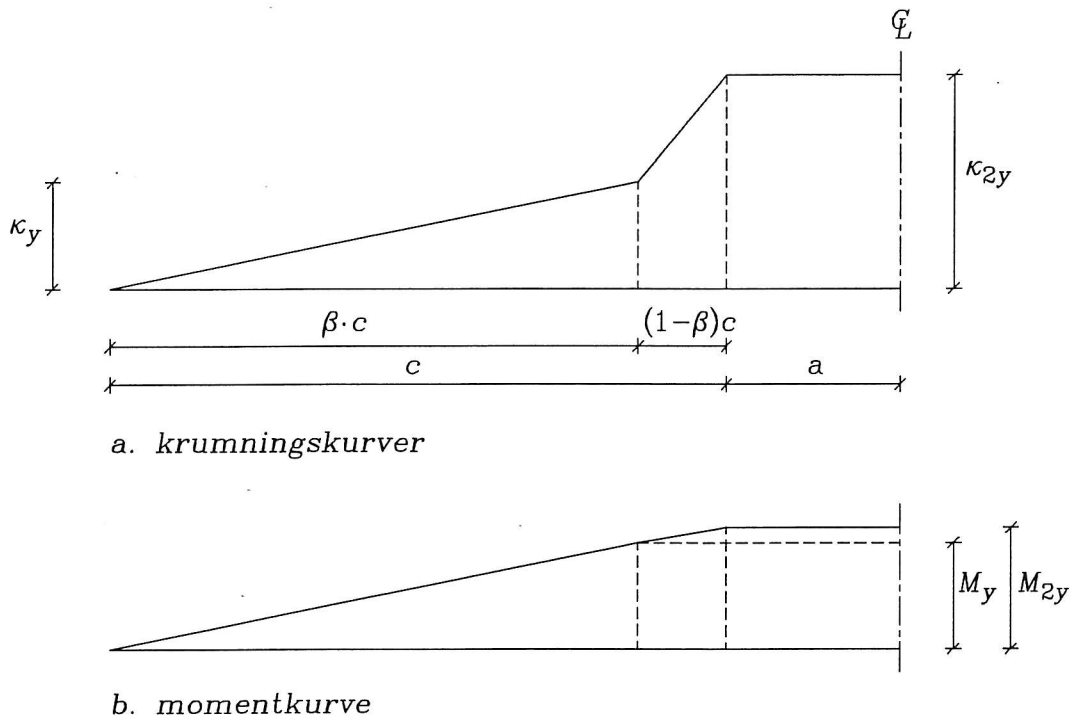
Det fremgår af figur 10, at fejlen, der begås ved at regne med retlinet krumningsforløb fra  $\kappa = 0$  til  $\kappa = \kappa_y$ , er meget lille (i de fleste tilfælde  $< 1\%$ ).

For  $\kappa_{\max} = \kappa_y$  fås derfor, se afsnit 3.2.1, med god tilnærmelse

$$u_{\max} = \kappa_y \left( \frac{1}{3}c^2 + \frac{1}{2}a^2 + a \cdot c \right) \quad (23)$$

### 3.2.4 $M_{\max} = M_{2y}$ , $P = \frac{M_{2y}}{c}$ , $\kappa_{\max} = \kappa_{2y}$ svarende til $\varepsilon_{s1} = 2 \cdot \varepsilon_{sy}$

For denne armeringstøjning bestemmes ved hjælp af ækvivalensbetingelserne nullinie-dybden  $x$ , og herefter kan de hertil svarende værdier for  $\kappa_{2y}$  og  $M_{2y}$  bestemmes, se afsnit 3.1. Krumning- og momentforløb kan herefter optegnes, som vist i figur 11, idet der ikke er taget hensyn til strækningen med urevnet tværsnit og til overgangszonen mellem revnet og urevnet tværsnit, dvs. der er regnet med revnet tværsnit over hele bjælken, se afsnit 3.2.3.



Figur 11. Krumnings- og momentforløb for  $\varepsilon_{s1} = 2\varepsilon_{sy}$

Med den i figur 1 viste belastning vil momentkurven vokse lineært over strækningen  $c$  fra understøtningspunkt til kraftangrebspunkt, hvor momentet er  $M_{2y}$ .

Da  $M_{2y}$  kun er lidt større end  $M_y$ , vil der forekomme knæk i krumningskurven, som vist i figur 11a. Krumningskurven regnes tilnærmeth stykvis retlinet.

Af ensvinklede trekanter i momentkurven fås  $M_{2y}/M_y = c/(\beta \cdot c)$ , hvoraf fås  $\beta = \frac{M_y}{M_{2y}}$ .

Da krumningskurven principielt er den samme som i afsnit 3.2.2, kan  $u_{\max}$  beregnes som i dette afsnit.

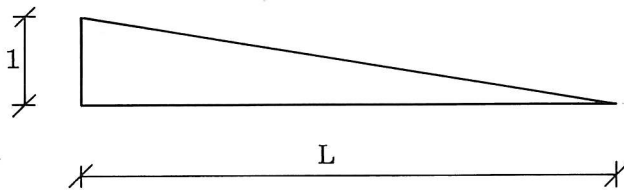
$u_{\max,2y}$  kan derfor bestemmes af (22) ved bogstavombytning,  $\kappa_R \rightarrow \kappa_y$ ,  $\kappa_A \rightarrow \kappa_{2y}$  og  $\gamma \rightarrow \beta$ , dvs.

$$u_{\max,2y} = \frac{c^2}{6}(1 + \beta) \cdot \kappa_y + \left( \frac{c^2}{3} \left( 1 + \frac{1}{2}\beta \right) (1 - \beta) + a \left( c + \frac{1}{2}a \right) \right) \cdot \kappa_{2y} \quad (24)$$

Flere punkter til støtte for optegningen af den teoretiske relation mellem  $u_{\max}$  og  $P$  kan findes om ønskeligt ved fremgangsmåden beskrevet ovenfor.

#### 4. BESTEMMELSE AF RELATIONEN MELLEM LASTEN $P$ OG BJÆLKENS VINKELDREJNING $\alpha_A$ OVER UNDERSTØTNINGERNE

Som ved beregning af den maksimale nedbøjning hidrørende fra bøjningspåvirkningen anvendes det virtuelle arbejdes princip ved beregning af bjælkens vinkeldrejning ved understøtningerne. Belastes bjælken med momentet 1 ved den venstre understøtning, fås den i figur 12 viste momentkurve.



Figur 12. Moment for belastningen  $M = 1$  over venstre understøtning.

De benyttede krumningsvariationer ved de nedenfor angivne lastniveauer er vist i figurerne 7–11.

$$4.1 \quad M_{\max} = M_R, \quad P = \frac{M_R}{c}, \quad \kappa_{\max} = \kappa_R$$

$$\alpha_A = \int_0^L M_1 \cdot \kappa \cdot dx$$

$$\alpha_A = \frac{1}{6}c \cdot \kappa_R \left( 1 + 2 \cdot \frac{c + 2a}{L} \right) + a \cdot \kappa_R \left( \frac{c + 2a}{L} + \frac{c}{L} \right) + \frac{c}{3} \cdot \kappa_R \cdot \frac{c}{L}$$

$$\alpha_A = \kappa_R \left( a + \frac{1}{2}c \right) \quad (25)$$

$$4.2 \quad M_{\max} = M_A, P = \frac{M_A}{c}, \kappa_{\max} = \kappa_A$$

$$\alpha_A = \int_0^L M_1 \cdot \kappa \cdot dx$$

$$\alpha_A = \frac{d}{6} \cdot \kappa_R \left( 1 + 2 \cdot \frac{L-d}{L} \right) + \frac{c-d}{6} \left( 2\kappa_R \cdot \frac{L-d}{L} + 2 \cdot \kappa_A \frac{L-c}{L} + \kappa_R \frac{L-c}{L} + \kappa_A \frac{L-d}{L} \right) +$$

$$a \cdot \kappa_A \left( \frac{c}{L} + \frac{L-c}{L} \right) + \frac{c-d}{6} \left( 2 \cdot \kappa_A \cdot \frac{c}{L} + 2 \cdot \kappa_R \cdot \frac{d}{L} + \kappa_A \cdot \frac{d}{L} + \kappa_R \cdot \frac{c}{L} \right) + \frac{d}{3} \cdot \kappa_R \cdot \frac{d}{L}$$

$$\alpha_A = \frac{1}{2} \cdot \kappa_R \cdot c + \frac{1}{2} \kappa_A (2a + c - \gamma \cdot c) \quad (26)$$

$$\text{hvor } \gamma = \frac{M_R}{M_A}$$

$$4.3 \quad M_{\max} = M_y, P = \frac{M_y}{c}, \kappa_{\max} = \kappa_y, \varepsilon_{s1} = \varepsilon_{sy}$$

Med principielt samme begrundelse som under 3.2.3 kan følgende udtryk benyttes til bestemmelse af vinkeldrejningen over understøtningerne:

$$\alpha_A = \int_0^L M_1 \cdot \kappa \cdot dx$$

$$\alpha_A = \kappa_y \left( a + \frac{1}{2}c \right)$$

$$4.4 \quad M_{\max} = M_{2y}, P = \frac{M_{2y}}{c}, \kappa_{\max} = \kappa_{2y}, \varepsilon_{s1} = 2\varepsilon_{sy}$$

Med principielt samme begrundelse som under 3.2.4 kan følgende udtryk benyttes til bestemmelse af vinkeldrejningen over understøtningerne:

$$\alpha_A = \int_0^L M_1 \cdot \kappa \cdot dx$$

$$\alpha_A = \frac{1}{2} \cdot \kappa_y \cdot c + \frac{1}{2} \kappa_{2y} (2a + c - \beta \cdot c)$$

$$\text{hvor } \beta = \frac{M_y}{M_{2y}}$$

I ovenstående er der ikke taget hensyn til skrårevneeffekten og forskydningskræfternes bidrag til deformationerne.

## SYMBOLLISTE

$A_{s1}, A_{s2}, A_{s3}$	Tværsnits areal for armeringen $A_{s1}, A_{s2}$ og $A_{s3}$ i armeringslag 1, 2 og 3 regnet fra tværsnittets underkant
$a$	Afstand fra bjælkemidte til kraftangrebspunkt
$b, b_0$	Bredde af henholdsvis tværsnittets flange og krop
$c$	Afstand fra understøtning til kraftangrebspunkt
$E_{0cm}$	Middelværdi for betonens begyndelseselasticitetskoefficient
$E_{cm}$	Middelværdi for den værdi af betonens elasticitetskoefficient, der benyttes ved flytningsbestemmelse
$E_{sm}$	Middelværdi for armeringens begyndelseselasticitetskoefficient
$f_{cm}$	Middelværdi for betonens trykbrudstyrke
$f_{ct, flm}$	Middelværdi for betonens bøjningstrækstyrke
$f_{ym}$	Middelværdi for armeringens flydespænding
$h$	Tværsnittets totale højde
$h_1, h_2, h_3$	Afstand fra henholdsvis armeringen $A_{s1}, A_{s2}$ og $A_{s3}$ til tværsnittets underkant
$I_{zur, tr}$	Inertimoment af det transformerede urevne tværsnit om tværsnittets tyngdepunktsakse
$I_{zr, tr}$	Inertimoment af det transformerede revne tværsnit om tværsnittets tyngdepunktsakse
$M$	Bøjende moment
$M_A$	Bøjende moment ved afslutningen af overgangszonen mellem urevnet og revnet tværsnit
$M_y$	Bøjende moment svarende til netop flydning i nederste armeringslag
$M_{2y}$	Bøjende moment svarende til tøjningen $\varepsilon_{s1} = 2 \cdot \varepsilon_{sy}$ i nederste armeringslag
$M_R$	Revnemoment
$M_1$	Momentet hidrørende fra kraften 1 eller fra momentet 1 angribende på det sted, hvor henholdsvis nedbøjning eller vinkeldrejning ønskes bestemt
$P_1, P_2$	Lodrette enkeltkræfter
$P$	$= \frac{1}{2}(P_1 + P_2)$
$t$	Flangetykkelse



$u_{\max}$	Max. nedbøjning ved bjælkemidten
$\Delta u_{\max}$	Tilvækst i max. nedbøjning ved bjælkemidten
$x$	Tværsnittets nulliniedybde Længdeparameter målt langs bjælkeaksen
$y_u$	Afstand fra det transformerede tværsnits tyngdepunkt til tværsnittets underkant
$y_0$	Afstand fra det transformerede tværsnits tyngdepunkt til tværsnittets overkant
$y_{s1}$	Afstand fra det transformerede tværsnits tyngdepunkt til nederste armeringslags tyngdepunkt
$\alpha$	$= \frac{E_{sm}}{E_{cm}}$
$\alpha_A$	Vinkeldrejning ved understøtning $A$
$\varepsilon_c, \varepsilon_s$	Tøjning i henholdsvis beton og armering
$\varepsilon_{cy}$	"Flydetøjning" for betonen
$\varepsilon_{s1}, \varepsilon_{s2}, \varepsilon_{s3}$	Tøjning i armeringen $A_{s1}, A_{s2}$ og $A_{s3}$
$\varepsilon_{uf}$	Tøjning i betonen ved bjælkeflangens underkant
$\varepsilon_{sy}$	Armeringens flydetøjning $\frac{f_y}{E_{sm}}$ eller $\frac{\sigma_{0,2}}{E_{sm}}$
$\kappa$	Bjælkekrumning
$\kappa_{\max}$	Max. krumning ved bjælkemidten
$\Delta \kappa_{\max}$	Tilvækst i max. krumning ved bjælkemidten
$\kappa_A$	Krumningen ved $M = M_A$
$\kappa_R$	Krumningen ved $M = M_R$
$\kappa_y$	Krumningen ved $M = M_y, \varepsilon_{s1} = \varepsilon_{sy}$
$\kappa_{2y}$	Krumningen ved $M = M_{2y}, \varepsilon_{s1} = 2 \cdot \varepsilon_{sy}$
$\sigma_{0,2}$	Den armeringsspænding der giver en blivende tøjning på 0,2%
$\sigma_{cc}$	Spænding i betonens trykzone
$\sigma_{cuf}$	Spænding i betonens trykzone ved flangeunderkant
$\sigma_{s1}, \sigma_{s2}, \sigma_{s3}$	Spænding i henholdsvis armeringslagene $A_{s1}, A_{s2}$ og $A_{s3}$

## LITTERATURFORTEGNELSE

Litteraturen angives f.eks. ved [1.55] eller [2], der betyder henholdsvis litteraturangivelse [1] side 55 eller [2] uden sideangivelse.

- [1] Dansk Ingeniørforenings Norm for betonkonstruktioner, DS 411, 4. udgave, marts 1999, 1. oplag.
- [2] CEB (Comité Européen du Béton): Recommandations internationales pour le calcul et l'exécution des ouvrages en béton. – 2. udg. 1970.
- [3] Mekanik 3.1, Spændinger og deformationer i plane bjælker af M. P. Nielsen, A. Rathkjen, L. Pilegaard Hansen.
- [4] Betonkonstruktioner: Materialer, sikkerhedsbestemmelser, beregninger i brud- og anvendelsesgrænsetilstanden af Gert Heshe, Aage Peter Jensen, Poul Kring Jacobsen og René Christensen.